

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Entrenamiento de Aritmética y Álgebra
Olimpiada de Matemáticas en Chiapas

Mayo del 2019

Para los siguientes problemas considerar lo siguiente:

- Suma de Gauss: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Suma de progresión aritmética: $a + (a + r) + (a + 2r) + \dots + (a + (k - 1)r) = k \cdot \frac{2a+(k-1)r}{2}$
- Teorema fundamental de la aritmética: Dado un entero $n > 1$ el número se puede expresar como producto de potencia de primos de manera única salvo el orden. A esta factorización se le llamará la descomposición canónica de n . Esta expresión se ve como $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_k^{\alpha_k}$. La cantidad de divisores positivos de n se encuentra sumando uno a cada exponente y multiplicando todos los resultados, es decir $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$.
- Un número natural $n > 1$ es potencia k -ésima perfecta si y sólo si todos los exponentes de su descomposición canónica es múltiplo de k .
- La suma de pares es par, la suma de dos impares es par, la suma de un par con un impar es impar.
- Si n divide a x y y , entonces n divide a su suma, su diferencia y a cualquier combinación lineal.

Problema 1. Cinco Animales A, B, C, D y E son perros o lobos. Los perros siempre dicen la verdad y los lobos siempre mienten. A dice que B es un perro. B dice que C es un lobo. C dice que D es un lobo. D dice que B y E son animales de especies distintas. E dice que A es un perro. ¿Cuántos lobos hay entre los cinco animales?.

Problema 2. Habían 2019 habitantes en una isla. Algunos de ellos eran caballeros y siempre decían la verdad y otros eran mentirosos y siempre mentían. Cada día uno de los habitantes se iba y decía: “En cuanto yo me vaya, entre los que quedan el número de caballeros será el mismo que el de mentirosos”. Después de 2018 días sólo quedó un caballero en la isla. ¿Cuántos caballeros había inicialmente?

Problema 3. Hallar el valor de

$$\frac{2017^2 - 2016^2 + 2015^2 - \dots - 2^2 + 1^2}{2017 - 2016 + 2015 - \dots - 2 + 1}$$

Problema 4. ¿Cuántos y cuáles son los divisores de 420?.

Problema 5. ¿Cuántos números menores a 2019 hay, tales que el producto de sus dígitos sea 30?.

Problema 6. ¿Cuántos y qué valores de n (entero positivo) hacen que la expresión $\frac{3n+118}{n+8}$ sea un entero positivo?.

Problema 7. ¿Cuál es el menor entero por el que hay que multiplicar a 1100 para que el resultado sea un cubo perfecto?

Problema 8. ¿Cuál es el menor entero por el que hay que dividir al número 108,675 para que el cociente sea un cuadrado perfecto?

Problema 9. ¿Cuál es la fracción más pequeña equivalente a 0.4 en el que la suma de su numerador y denominador es un cuadrado de cuatro cifras?

Problema 10. El rectángulo $ABCD$ tiene lados enteros. Además el valor numérico de su perímetro es igual al de su área. Hallar la suma de todos los posibles valores de dicha área?.

Problema 11. Gauss desea distribuir 127 canicas en grupos de igual cantidad, pero en cualquier caso quiere que sobre 7 canicas. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Problema 12. ¿Cuántas parejas de enteros no negativos (m, n) satisfacen la ecuación $2^m - 2^n = 63$?

Problema 13. A Hugo le gusta correr, para entrenar realiza sesiones de de 3, 5 y 7 kilómetros. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 kilómetros. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones?

Problema 14. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (n, k) que satisfacen $n^3 - 2 = k!$.

Problema 15. Encuentra el mayor número de 4 dígitos que al dividirse entre 2, 3, 6, 7 y 9, deja residuo 1 en cada caso.

Problema 16. ¿Cuántos números distintos pueden ser expresados como la suma de tres números distintos del conjunto $\{1,4,7,10,13,16,19\}$?

Problema 17. Un tren está formado por 18 vagones. En total hay 700 pasajeros en el tren, pero se sabe que en cada 5 vagones consecutivos hay exactamente 199 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros en total hay en los dos vagones que están en el centro del tren?

Problema 18. Hallar el valor de $a + b + c + d + e + f$ si:

$$a + b + c = 1$$

$$b + c + d = 2$$

$$c + d + e = 3$$

$$d + e + f = 4$$

$$e + f + a = 5$$

$$f + a + b = 3$$

Sugerencia. Sumar todas las ecuaciones y simplificar.